On centers of blocks of finite groups (Cohomology theory of finite groups and related topics)

AUTHOR(S):

音喜多, 純拓

数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 93-97

On centers of blocks of finite groups

千葉大学大学院理学研究科　　音喜多 純拓
Yoshihiro Otokita
Graduate School of Science,
Chiba University

序論

本稿は RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」(2017 年 2 月) における講演内容の解説，および要約である．

以下では G を有限群，F を標数 $p>0$ の代数的閉体とし，それらから構成される群環 FG を考える．後に述べるように FG は両側イデアルとして直既約分解することができ，各直和因子をブロックという．よって FG の代数的構造を考察するためには，各ブロックを調べれば十分である．ブロック B に対して，その不足群と呼ばれる G のある p-部分群 δ_B が定義される．有限群のモジュラー表現論において「ブロック B の代数的構造と不足群 δ_B の群論的性質の関係性を明らかにする」という問題が考えられている．例えば，δ_B が自明なときや巡回群のときなどは B の表現がよく知られている．本稿ではこれに関連してブロックの中心 ZB について述べる．ZB の F-上の次元は B に付随する通常既約指標の個数 $k(B)$ と一致することが知られている．したがって Brauer による「$k(B) \leq |\delta_B|$ ではないか？」という予想は「$\dim ZB \leq |\delta_B|$ ではないか？」と言い換えることができ，ZB と δ_B の考察に動機を見出すことができる．しかしながら，ZB に関する既知の研究は B に関する研究に比べれば決して多くはなく，考えるべき問題が多く残されている．そこでまずは ZB の Loewy 構造を調べることにする．すなわち ZB の Jacobson 根基 JZB に対し，その Loewy 列

$$ZB \supsetneq JZB \supsetneq J^2ZB \supsetneq \cdots \supsetneq J^nZB = 0$$

と Loewy length

$$\mathrm{ll}ZB = \min\{n \geq 1 \mid J^nZB = 0\}$$

を考える．Loewy 列は (狭義) 下降列であるから Brauer 予想が正しければ $\mathrm{ll}ZB \leq |\delta_B|$ も成り立つ．実際，これ自体はすでに Okuyama [8] によって示されている．そこで本研究ではこの結果を発展させることを目的とした．特に本稿では Külshammer-Sambale [6], Otokita [9] の結果を述べる．

1　定義と準備

ここでは本稿で用いるブロックと不足群の定義を示す．

FG の中心的原始べき等元全体 (すなわち中心 ZFG の原始べき等元全体) の集合を $\mathrm{pi}(ZFG)$ とする．このとき $e \in \mathrm{pi}(ZFG)$ に対し FGe は FG の両側イデアルとしての直既約な直和因子となり，FG はこれらすべての直和で表される．各直和因子 FGe をブロックという．以降，ブロックを B，対応するべき等元を e_B とする．すなわち $e_B \in \mathrm{pi}(ZFG)$ であって $B = FGe_B$ である．

次に不足群を定義する．群環の元 $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in FG$ に対し $\mathrm{Supp}(\alpha) = \{g \in G \mid \alpha_g \neq 0\}$ とする．このとき集合 $\{P \in \mathrm{Syl}_p(C_G(g)) \mid g \in \mathrm{Supp}(e_B)\}$ には $\leq_G$ に関する最大元が存在することが知られている．そ

の1つを δ_B と書き，B の不足群という．

ブロックと不足群に関する次の定理は重要である．

定理 1.1 ([7, III, Theorem 6.37])**.** 以下は同値である．

(1) $\delta_B = 1$.
(2) B は単純環である．

一般に $p \nmid |G|$ であることと FG が半単純であることは同値であり（Maschke の定理），これをブロックに細分して考えたものが上の定理である．また不足群が巡回群の場合は次が知られている．

定理 1.2 (Rickard [11])**.** 不足群が巡回群 $\mathbb{Z}_{p^d}$ ならば，自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{p^d})$ のある p'-部分群 $\mathbb{Z}_l$（すなわち $\mathbb{Z}_{p-1}$ の部分群）が存在し，B と $F[\mathbb{Z}_{p^d} \rtimes \mathbb{Z}_l]$ が導来同値となる．

この他，不足群が $\mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^n}$ の場合も B の構造が決定されている（Erdmann [3], Eaton-Kessar-Külshammer-Sambale [2]).

2 ブロックの中心

本稿の主なテーマはブロックの中心 ZB であるから，ここでその基本的な性質をまとめる．以下では不足群 δ_B を単に D と書くことにする．まず次の命題に注意する．

命題 2.1. ブロックの中心 ZB は局所環である．

したがって ZB の Jacobson 根基 JZB はただ1つの極大イデアルである．これを用いて定理 1.1 を ZB に関する条件で述べることができる．

定理 2.2. 以下は同値である．

(1) $D = 1$.
(2) $ZB \simeq F$.
(3) $\mathrm{ll}ZB = 1$.

さて本研究の動機は Okuyama による次の結果である．

定理 2.3 (Okuyama [8])**.** B を FG のブロック，D をその不足群とすると $\mathrm{ll}ZB \leq |D|$.
また以下は同値である．

(1) $\mathrm{ll}ZB = |D|$.
(2) B はべき零ブロックで D は巡回群.

ここではべき零ブロックについては述べないが，上の同値条件が成り立つとき，B は巡回 p-群の群環 $F[\mathbb{Z}_{|D|}]$ と森田同値となり，表現論的には非常に分かりやすい構造を持っている（Broué-Puig [1], Puig [10] 参照).

本研究ではこの定理の発展を目的とした．次が本稿の主結果である．

定理 2.4 (Otokita [9])**.**

$$\mathrm{ll}ZB \leq \max\{(|u|-1)\mathrm{ll}Z\bar{b} \mid (u,b) : B\text{-部分節}\} + 1.$$

ここで $|u|$ は u の位数，$\bar{b}$ は b によって dominate されるブロックである．

ここでは B-部分節については言及しないが，上の定理は次のように言い換えることができる．

系 2.5. ブロック B とその不足群 D に対し，ある $u \in D$ と不足群 $C_D(u)/\langle u\rangle$ を持つ $F[C_G(u)/\langle u\rangle]$ のブロック $\bar{b}$ が存在し，$\mathrm{ll}ZB \leq (|u|-1)\mathrm{ll}Z\bar{b}+1$ を満たす．

定理 2.3 を $\bar{b}$ に適用すると $\mathrm{ll}Z\bar{b} \leq |C_D(u)/\langle u\rangle|$ である．ここで D の位数と指数（exponent）をそれぞれ p^d, p^ε とすると，$|C_D(u)| \leq p^d, |u| \leq p^\varepsilon$ なので系 2.5 から次を得る．

系 2.6 (Otokita [9])**.** $\mathrm{ll}ZB \leq p^d - p^{d-\varepsilon} + 1 \leq p^d$.

上の不等式において後半の等号が成立するのは D が巡回群であることと同値である．前半の不等号については，[9] と Külshammer-Sambale[6] を合わせて次が示される．

系 2.7. 以下は同値である．

(1) $\mathrm{ll}ZB = p^d - p^{d-\varepsilon} + 1$.
(2) B はべき零ブロックで不足群は $\mathbb{Z}_{p^d}$ または $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である．

3 特別な不足群

前章と同様，ブロック B の不足群を D とする．本研究の目的の 1 つは「不足群 D の構造が与えられた場合に $\mathrm{ll}ZB$ の上限値を求める」ということである．定理 2.4（または系 2.5）によってこの問題は D の局所的な構造に帰着させることができる．そこでいくつかの特別な不足群についての結果を述べる．ここでは講演時よりも多くの例を挙げており，また定理 3.3 は最近改良された結果である．

定理 3.1 (Koshitani-Külshammer-Sambale [4])**.** 不足群が巡回群のとき，定理 1.2 の表示を用いると

$$\mathrm{ll}ZB = \mathrm{ll}ZF[\mathbb{Z}_{p^d} \rtimes \mathbb{Z}_l] = \frac{p^d-1}{l} + 1.$$

定理 3.2 (Külshammer-Sambale [6])**.** 不足群 D が $(p^{a_1}, \ldots, p^{a_r})$ 型の可換群のとき

$$\mathrm{ll}ZB \leq p^{a_1} + \cdots + p^{a_r} - r + 1 \leq |D|.$$

次に非可換群の中で指数が最も大きい場合を考える．まず次の群を定義する．

- $D_{2^n} := < x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{-1} > \quad (n \geq 3)$,
- $Q_{2^n} := < x, y \mid x^{2^{n-2}} = y^2, y^4 = 1, y^{-1}xy = x^{-1} > \quad (n \geq 3)$,

- $SD_{2^n} :=< x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1, y^{-1}xy = x^{2^{n-2}-1} > \quad (n \geq 4)$,
- $M_{p^n} :=< x, y \mid x^{p^{n-1}} = y^p = 1, y^{-1}xy = x^{p^{n-2}+1} > \quad (p = 2, n \geq 4$ または $p \neq 2, n \geq 3)$.

位数 p^n の非可換 p-群 P に対し，指数が p^{n-1} となるのは以下のいずれかである.

- D_8 または Q_8,
- $D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}$ または $M_{2^n} \quad (n \geq 4)$,
- $M_{p^n} \quad (p \neq 2, n \geq 3)$.

定理 3.3 (Külshammer-Otokita-Sambale [5]). 不足群 D が位数 p^d の非可換群で上のいずれかに同型のとき

$$\mathrm{ll}ZB \leq \begin{cases} 2^{d-2}+1 & \text{if } p = 2, \\ p^{d-2} & \text{if } p \neq 2. \end{cases}$$

次に非可換群で，その中心の指数が最大となる場合を考える. 位数 p^n の p-群 P に対し，$Z(P)$ が位数 p^{n-2} の巡回群となるのは以下のいずれかである (Külshammer-Sambale [6] 参照).

- D_8 または Q_8,
- $M_{p^n} \quad (n \geq 3)$,
- $W_{p^n} :=< x, y, z \mid x^{p^{n-2}} = y^p = z^p = [x, y] = [x, z] = 1, [y, z] = x^{p^{n-3}} > \quad (n \geq 3)$.

定理 3.4 (Külshammer-Sambale [6]). 不足群が W_{p^d} のとき $\mathrm{ll}ZB \leq p^{d-1} - p + 1$.

最後にこれまでの定理で示されていない p-群の中で位数が最も小さい 16 の場合について述べる. このような 2-群で非可換なものは 9 つの同型類を持つ.

定理 3.5 (Külshammer-Sambale [6]). 不足群 D が位数 16 の非可換群のとき

$$\mathrm{ll}ZB \leq \begin{cases} 3 & \text{if } D \simeq \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4, \\ 4 & \text{if } D \in \{M_{16}, D_8 \times \mathbb{Z}_2, Q_8 \times \mathbb{Z}_2, MNA(2,1)\}, \\ 5 & \text{if } D \in \{D_{16}, Q_{16}, SD_{16}, W_{16}\}. \end{cases}$$

最後に本稿に述べたすべての結果の系を述べよう. 位数 p^n の p-群 P に対して次を定義する.

$$\mathcal{L}(P) = \begin{cases} p^{a_1} + \cdots + p^{a_r} - r + 1 & \text{if } P \simeq \mathbb{Z}_{p^{a_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{a_r}}, \\ 2^{n-2}+1 & \text{if } P \in \{D_{2^n}, Q_{2^n}, SD_{2^n}\}, \\ 2^{n-2}+1 & \text{if } P \simeq M_{2^n}, n \geq 5, \\ p^{n-2} & \text{if } P \simeq M_{p^n}, p \neq 2, \\ p^{n-1} - p + 1 & \text{if } P \simeq W_{p^n}, |P| \neq 16, \\ 3 & \text{if } P \simeq \mathbb{Z}_4 \rtimes \mathbb{Z}_4, \\ 4 & \text{if } P \in \{M_{16}, D_8 \times \mathbb{Z}_2, Q_8 \times \mathbb{Z}_2, MNA(2,1)\}, \\ 5 & \text{if } P \simeq W_{16}, \\ \max\{(|u|-1)\mathcal{L}(C_P(u)/\langle u \rangle) \mid 1 \neq u \in P\} + 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき定理 2.4, 系 2.5 より次が成り立つ.

系 3.6. *FG のブロック B とその不足群 D に対し, $\mathrm{ll}ZB \leq \mathcal{L}(D) \leq |D|$.*

参考文献

[1] M. Broué, L. Puig, *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1980), 117–128.

[2] C. Eaton, R. Kessar, B. Külshammer, B. Sambale, *2-blocks with abelian defect groups*, Adv. Math. **254** (2014), 706–735.

[3] K. Erdmann, *Blocks whose defect groups are Klein four groups: a correction*, J. Algebra **76** (1982), 505–518.

[4] S. Koshitani, B. Külshammer, B. Sambale, *On Loewy lengths of blocks*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **156** (2014), 555–570.

[5] B. Külshammer, Y. Otokita, B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks II*, arXiv:1703.01917v1.

[6] B. Külshammer, B. Sambale, *Loewy lengths of centers of blocks*, arXiv:1607.06241v2.

[7] H. Nagao, Y. Tsushima, *Representations of finite groups*, Academic Press Inc., Boston, MA (1989).

[8] T. Okuyama, *On the radical of the center of a group algebra*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 406–408.

[9] Y. Otokita, *Characterizations of blocks by Loewy lengths of their centers*, Proc. Amer. Math. Soc., **145** (2017), 3323–3329.

[10] L. Puig, *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77–116.

[11] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.